

Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду

Семинарист: Я не ходил на лекции Яковлева (по философии), потому что они были в субботу второй парой. Мне хватило ММФ в 5-м семестре первой парой субботу, там я ходил, но ничего не понял. Даже контрольную какую-то переписывал...

Формула для объёмной плотности силы, действующей на диэлектрик в электрическом поле:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} - \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \vec{\nabla} \epsilon + \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau \right)$$

Первое слагаемое – это плотность силы, действующая на сторонние заряды. Тут всё понятно.

Второе слагаемое связано с неоднородностью среды (присутствует градиент  $\epsilon$ ).

Третье слагаемое связано с неоднородностью поля. Также в него включена производная  $\epsilon$  по  $\tau$ .  $\tau$  – это обычная плотность,  $\text{кг/м}^3$ , просто буква  $\rho$  занята под объёмную плотность заряда.

### ЗАДАЧА 23.3

23.3. Вычислить силу действующую на единицу объема разреженного, нейтрального газа с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , помещенного во внешнее, неоднородное электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}_0(\vec{r})$ .

Первое слагаемое будет ноль – сторонних зарядов нет!

Второе тоже ноль –  $\epsilon$  во всех точках газа одна и та же.

Значит, считаем третье, самое упоротое слагаемое. Значительные сложности

для нас представляет  $\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau}$ . В разреженном газе  $\epsilon-1$  (поляризуемость) прямо пропорционально концентрации молекул, плотность  $\tau$  также прямо пропорциональна концентрации. Обозначим коэф пропорциональности за  $\alpha$

(это хар-ка газа):  $\epsilon-1 = \alpha \tau$ . Тогда  $\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau}$  превратится в  $\alpha$ , т.е. (вновь избавляемся от  $\alpha$ )  $\epsilon-1$ .

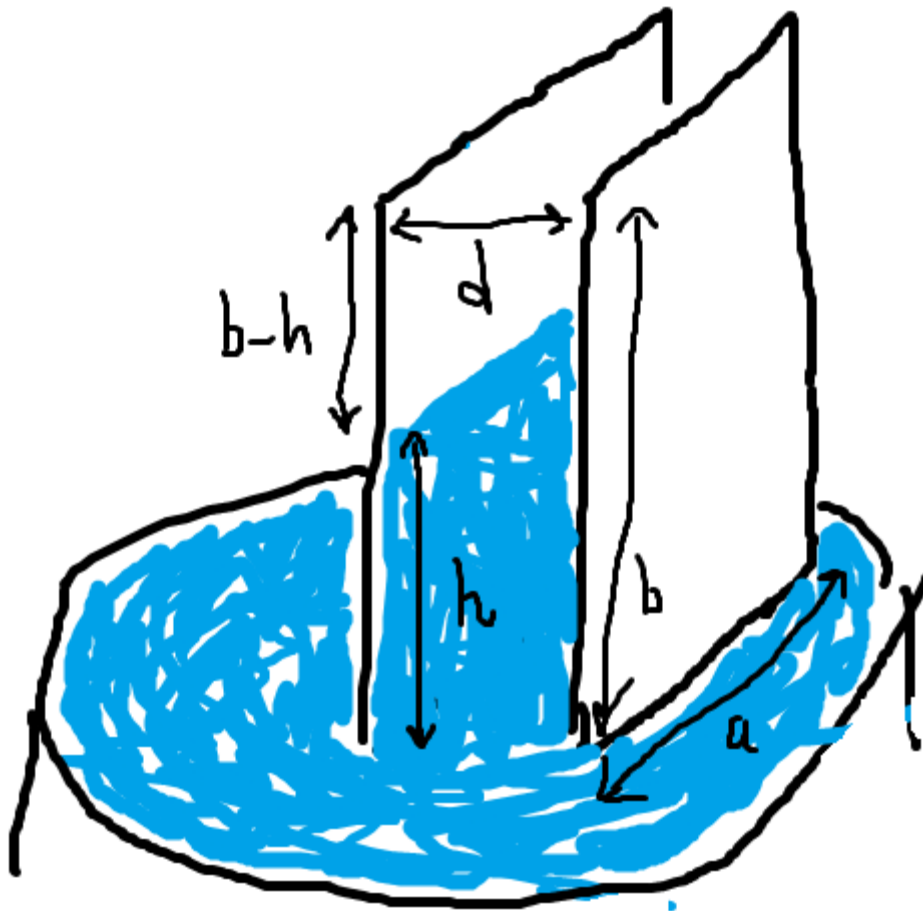
И  $8\pi$ , и  $\epsilon-1$  (в силу однородности газа) выносятся из под оператора градиента. Там остаётся только  $E^2$ , потому что  $\vec{E}$  как раз функция радиус-вектора (поле неоднородно), и именно на него будет действовать градиент:

$$F = \frac{\epsilon-1}{8\pi} \rho_{га} \nabla E^2$$

Ответ получен.

### ЗАДАЧА 23.4

23.4. Найти высоту поднятия жидкости с плотностью массы  $\tau$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  между пластинами плоского конденсатора, опущенными в жидкость, если между ними поддерживается постоянная разность потенциалов  $V$ , а расстояние между пластинами равно  $d$ .



Чугреев решает её каким-то очень сложным и длинным способом, используя, если я не ошибаюсь, тензор напряжений. К счастью, у вас есть я с рабоче-крестьянским и простым решением ☺

Как вы помните, при повышении  $\epsilon$  возрастает ёмкость конденсатора, а вместе с ней (при постоянном напряжении) и энергия конденсатора. Именно она и «засасывает» жидкость внутрь конденсатора. Идея решения: приравнять изменение энергии конденсатора к изменению потенциальной энергии тяжести.

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$$

Гуглим формулу ёмкости в СГС:

Используя соотношение  $W_C = CU^2/2$ , получаем формулу для энергии

$$W_C = \frac{\epsilon S U^2}{8\pi d}$$

конденсатора:

Заметим, что конденсатор не весь заполнен жидкостью, так что у нас по сути два параллельно соединённых конденсатора:

Один, нижний, с заполненной жидкостью и площадью обкладок  $S = ah$ . У него

$$\frac{\epsilon ah U^2}{8\pi d}$$

энергия  $\frac{\epsilon ah U^2}{8\pi d}$ . У второго, верхнего, вместо жидкости воздух, а площадь

$$\frac{a(b-h) U^2}{8\pi d}$$

обкладок  $S = a(b-h)$ . Энергия у него

$$\frac{a(b-h) U^2}{8\pi d}$$

Складываем:

$$W_c = \frac{aU^2}{8\pi d} (\epsilon h + b - h) = \frac{aU^2}{8\pi d} ((\epsilon - 1)h + b)$$

Теперь давайте представим, что столб жидкости поднялся на  $dh$ .

Потенциальная энергия выросла. Насколько? На  $\frac{aU^2}{8\pi d} (\epsilon - 1)dh$ .

$$A = dm \cdot g \cdot h = \tau dV g h = \tau a d g h dh$$

Приравниваем, получаем ответ:

$$\tau \cdot a \cdot d \cdot g \cdot h \cdot dh = \frac{aU^2}{8\pi d} (\epsilon - 1) dh$$

$$\tau d g h = \frac{U^2 (\epsilon - 1)}{8\pi d}$$

$$h = \frac{U^2 (\epsilon - 1)}{8\pi \tau g d^2}$$

А что Чугреев? ☺ Получил своим тензором напряжений то же, только забыл в последней строчке  $8\pi$ :

$$\frac{(\epsilon - 1)}{8\pi} E^2 a d = \tau a d h g$$

$$h = \frac{(\epsilon - 1) E^2}{g \tau} = \frac{(\epsilon - 1)}{g \tau} \frac{V^2}{d^2} \sim \frac{V^2}{d^2}$$

Кстати, мой скромный репетиторский опыт (и участия в школьных олимпиадах) мне подсказывает, что подобная задача предлагается школьникам, и они вполне могут её решить (лишь с той разницей, что они будут её решать в СИ).

### Резюме:

Основная формула, позволяющая считать объёмную плотность силы (а после интегрирования и силу), действующую на диэлектрик:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} - \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \vec{\nabla} \epsilon + \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{E}^2}{8\pi} \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right)$$